

Théorème 66 (complément à la preuve)

$$\begin{aligned}\text{Proj}_W(\vec{v}) &= (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_p) \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_p \end{pmatrix} \\ &= (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_p) \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_p^T \end{pmatrix} \vec{v}\end{aligned}$$

En effet, notons

$$U = (\underbrace{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_p}_{n \times p}) = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{np} \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1$ $\vec{u}_p$

Alors comparons la i^e ligne de

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_p \end{pmatrix}_{(p \times 1)} \quad \text{et} \quad \text{de} \quad \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_p^T \end{pmatrix}_{(p \times n)} \vec{v}_{(n \times 1)} \quad . \quad \text{On a } \vec{u}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{pmatrix}$$

$$* \quad \vec{v} \cdot \vec{u}_i = v_1 u_{1i} + v_2 u_{2i} + \dots + v_n u_{ni} \in \mathbb{R}$$

$$* \quad \vec{u}_i^T \vec{v} = (u_{1i} \dots u_{ni}) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_{1i} v_1 + \dots + u_{ni} v_n \in \mathbb{R}$$

$(1 \times n) (n \times 1)$

Ceci est un
produit matriciel

Ces deux expressions sont bien
égales !